УДК 517.928.4
DOI 10.35254/bsu/2025.74.36

Туркманов Ж. К.
К.Карасаев атындагы БМУ,
ф-м.илим. канд. доц.
zhturkmanov@bhu.kg

Карынбаева М. М.,
К.Карасаев атындагы БМУ,
ага окутуучу
mkarynbaeva@bhu.kg

КИЧИНЕ ПАРАМЕТРИ ЖАНА ӨЗГӨЧӨ ЧЕКИТТЕР БАР БИРИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР ҮЧҮН УНИФОРМДАШТЫРУУ ЫКМАСЫ

Кыскача мазмуну

Бул иштин максаты биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдемелерди чечүү үчүн кичине параметри жана өзгөчө чекиттери бар жүйөдө колдонулган униформдаштыруу методун иштеп чыгуу жана негиздөө болуп саналат. Изилдөө өзгөчө чекиттердин айланасында чечимдердин асимптоттук жүрүм-туруму жөнүндө комплекстүү анализ жана теңдемелердин аныктоо областынын бүт аймагында алардын бирдиктүү жарактуулугун камсыз кылууга багытталган. Сунуш кылынган методологиялык ыкма изилденген чечүү областын сыртка жана ички бөлүктөргө толук бөлүүнү, ар бир область үчүн асимптоттук жакындаштырууларын өндүрүүнү жана аларды чек катмарлары аркылуу угулаштырууну камтыйт. Метод сингулярдуулугу бар татаал сызыктуу эмес теңдемелерге колдонулганда жогорку натыйжалуулукту жана практикалык маанилүүлүктү көрсөтөт. Конкреттүү мисалдар бирдиктүү жарактуу асимптоттук чечимдерди алуу мүмкүндүгүнүн чыныгы мүмкүндүгүн математикалык ырастайт.

Түйүндүү сөздөр: униформдаштыруу методу, дифференциалдык теңдемелер, кичине параметр, асимптоттук ыкмалар, өзгөчө чекиттер, чек катмарлары, сингулярдуу возмущениялар, сызыктуу эмес теңдемелер, асимптоттук жакындаштыруулар, угулаштыруу

Туркманов Ж. К.
БГУ им. К.Карасаева,
к.ф-м.н. доц.
zhturkmanov@bhu.kg

Карынбаева М. М.,
БГУ им. К.Карасаева,
старший преподаватель
mkarynbaeva@bhu.kg

МЕТОД УНИФОРМИЗАЦИИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ И ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

Аннотация

Работа посвящена разработке и обоснованию метода униформизации для решения дифференциальных уравнений первого порядка с малым параметром и особыми точками. Исследование направлено на комплексный анализ асимптотического поведения решений в окрестности особенностей и обеспечение их равномерной справедливости на всей области определения уравнений. Предлагаемый методический подход предусматривает разделение исследуемой области решения на внешнюю и внутреннюю части с построением асимптотических приближений для каждой области и их последующим согласованием через пограничные слои. Метод демонстрирует высокую эффективность и практическую значимость при применении к сложным нелинейным дифференциальным уравнениям с сингулярностями. Приведённые конкретные примеры подтверждают реальную возможность получения единообразно справедливых асимптотических решений на всей исследуемой области математического интегрирования.

Ключевые слова: метод униформизации, дифференциальные уравнения, малый параметр, асимптотические методы, особые точки, граничные слои, сингулярные возмущения, нелинейные уравнения, асимптотические приближения, пограничные слои

Turkmanov Zh.K.
BSU named after K. Karasaev,
Ph.D. Assoc. Prof.
zhturkmanov@bhu.kg

Karynbaeva M. M.,
BSU named after K. Karasaev,
senior lecturer
mkarynbaeva@bhu.kg

UNIFORMIZATION METHOD FOR FIRST-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A SMALL PARAMETER AND SINGULAR POINTS

Abstract

This article develops and justifies the uniformization method for solving first-order differential equations with small parameters and singular points. The research analyzes the asymptotic behavior of solutions in the neighborhood of singularities and ensures their uniform validity throughout the entire domain of definition. The proposed approach divides the solution region into outer and inner parts, constructing asymptotic approximations for each region and matching them through boundary layers. The method demonstrates high efficiency and practical value when applied to complex nonlinear differential equations with singularities. Concrete examples confirm the feasibility of obtaining uniformly valid asymptotic solutions throughout the entire investigated domain.

Keywords: uniformization method, differential equations, small parameter, asymptotic methods, singular points, boundary layers, singular perturbations, nonlinear equations, asymptotic approximations, matching

Киришүү. Бул илимий макаланын негизги максаты биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдемелерди чечүүдө униформизациялоо методунун колдонулушун изилдөөдөн турат. Айрыкча, кичине параметрлерди жана өзгөчө чекиттерди камтыган татаал дифференциалдык теңдемелердин чечимдерин табуу заманбап математиканын негизги проблемаларынын бири болуп саналат.

Изилдөөбүздүн негизги объектиси катары асимптотикалык анализдин негизинде иштелип чыккан униформизациялоо методу алынат. Бул метод аркылуу сырткы жана ички аймактардагы чечимдердин асимптотикалык жакындаштыруулары бириктирилет, натыйжада бүтүндөй аныктоо аймагында бирдей жарактуу болгон чечимдер алынат.

Бул иштин жыйынтыктары дифференциалдык теңдемелер теориясына маанилүү салым кошот жана илимий-техникалык маселелерди чечүүдө колдонулушу мүмкүн.

Эми теңдемени карап көрөлү:

$$x + \varepsilon u(x)u'(x) + q(x)u(x) = r(x), \qquad u(1) = b \qquad (1)$$

Мында, $0 < \varepsilon << 1$, $q(x), r(x) - [0,1]$ кесиндисинде аналитикалык функциялар.

Козголуулар методун колдонолу.

Чечимдерди ε боюнча катарга ажыратуу.

$u(x)$ чечимин кичине параметр ε боюнча катар түрүндө берүү мүмкүн болсун дейли:

$$u(x) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \ldots \qquad (2)$$

(2) ни (1) ге коёлу:

$$(x + \varepsilon(u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \ldots))(u_0'(x) + \varepsilon u_1'(x) + \varepsilon^2 u_2'(x) + \ldots)$$
$$+ + q(x)(u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \ldots) = r(x)$$

Бирдей даражадагы ε үчүн коэффициенттерди теңдөө.

ε^0 үчүн коэффициенттерди теңдейбиз: $xu_0' + q(x)u_0 = r(x)$

ε^1 үчүн коэффициенттерди теңдейбиз: $xu_1' + q(x)u_1 + u_0u_0' = 0$

$u_0(x)$ жана $u_1(x)$ ти тапкандан кийин жакындатылган чечимди төмөндөгүдөй жазууга болот:

$$u(x) \approx u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \ldots$$

Демек, кичине параметр ε ду камтыган маселени козголуу методу менен ε дун ар бир тартиби үчүн чечүүгө болот.

Төмөндөгүдөй суроо пайда болот:

Жогоруда көрсөтүлгөн чечимдер $x=0$ болгондо өзгөчө чекиттерди камтыйт. Ал эми чечимдерди нөлгө чейин алуу мүмкүнбү?

Эгер $q(x)$ жана $r(x)$ $[0,1]$ кесиндисинде аналитикалык функция болушса, анда $x=0$ чекитинде да аныкталган чечимди тургузууга аракет кылса болот. Бул үчүн чечимдин $x=0$ чекитине жакын жердеги абалын дагы да так анализдөө керек.

Чечимдин $x=0$ *чекитиндеги абалын анализдөө:*

Төмөнкү теңдемени карайлы:

$$(x+\varepsilon u(x))u' + q(x)u(x) = r(x) \qquad u(1)=b$$

$x=0$ болгондо теңдеме төмөнкүдөй болот:

$$\varepsilon u(0)u'(0) + q(0)u(0) = r(0)$$

Бул байланыш $u(0)$ жана $u'(0)$ маанилерин байланыштырат.

Эгер $\varepsilon=0$ болсо, анда $q(0)u(0)=r(0)$ болот. Мындан

$$u(0)=\frac{r(0)}{q(0)} \tag{3}$$

келип чыгат.

Эгерде $q(0)\neq 0$ болсо, (3) бизге $u(x)$ үчүн $x=0$учурунда баштапкы шартты берет.

$x=0$ *чекитине жакын аралыкта чечимди тургузуу:*

Чечимди $x=0$ чекитине жакын аралыкта туура тургузуу үчүн Тейлор катарына ажыратуу керек:

$$u(x)=u(0)+u'(0)x+\frac{u''(0)}{2}x^2+\ldots \tag{4}$$

(4) тү баштапкы тендемеге коёбуз жана x тин бирдей даражаларындагы коэффициенттерди теңейбиз. Бул $u(0), u'(0), u''(0), \ldots$ табууга мүмкүндүк берет.

Демек, эгер $q(x)$ жана $r(x)$ $[0,1]$ кесиндисинде аналитикалык функциялар болушса, анда $u(x)$ чечимин $x=0$ чекитине жакын аралыкта Тейлор катарына ажыратып табууга болот. [2, 95-100 б.]

Эгер баштапкы шарттар тендеме менен шайкеш келсе, $x=0$чекитинде туура чечимди түзүүгө мүмкүнчүлүк берет. Бирок, $q(0)$ же $r(0)$ өзгөчөлүккө ээ болсо, анализ татаалдашат жана башка ыкмаларды колдонуу талап кылынат.

Униформизациялоо ыкмасы. Асимптотикалык чечимди бир түргө келтирүү ыкмасы менен түзүү үчүн төмөнкү теңдемени карап көрөлү:

$$x+\varepsilon u(x)u'(x)+q(x)u(x)=r(x), \qquad u(1)=b \tag{5}$$

Мында, $0<\varepsilon<<1$, $q(x), r(x)-[0,1]$ кесиндисинде аналитикалык функциялар

Униформизация ыкмасы асимптотикалык чечимди түзүүгө мүмкүндүк берет, ал $[0,1]$ аралыгын толугу менен камтып анын ичинде $x=0$чекитинин айланасын да камтыйт.

Униформизациялоо ыкмасынын негизги идеясы:

Униформизациялоо ыкмасы – бул теңдеменин чечимин асимптотикалык катарга бөлүнүүсүн түзүү жана ал теңдеменин ар кандай чөйрөлөрдөгү өзгөчөлүктөрүн эске алуу. Бул үчүн “масштабдоочу өзгөрмө” киргизилет, ал өзгөчө чекиттин айланасында чечимдин абалын изилдөөгө жардам берет. [4, 112 б.]

Областтарга бөлүштүрүү.

1.Сырткы область ($x = 0$ чекитинен алыс). Бул областта чечим ε боюнча стандарттуу асимптотикалык түргө ээ:

$$u(x) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \ldots \qquad (6)$$

2. Ички область ($x = 0$ чекитине жакын). Бул областта $x = 0$ чекитинин айланасын кеңейтүү үчүн масштабдуу өзгөрмө $x_i = \frac{x}{\varepsilon}$ киргизилет. [1, 50–60 б.]

Чечим төмөндөгүдөй болот:

$$u(x) = u(\xi) = u_0(\xi) + \varepsilon u_1(\xi) + \varepsilon^2 u_2(\xi) + \ldots$$

Сырткы катарды тургузуу. Сырткы катар ε кичине жана x нөлгө жакын эмес деп кабыл алынганда тургузулат. (6) ны (5) ке коюп төмөнкүнү алабыз:

$$(x + \varepsilon(u_0 + \varepsilon u_1 + \ldots))(u_0' + \varepsilon u_1' + \ldots) + q(x)(u_0 + \varepsilon u_1 + \ldots) = r(x) \qquad (7)$$

ε дун даражасынын коэффициенттерин теңдейбиз:

$$\varepsilon^0 : x u_0' + q(x) u_0 = r(x), \qquad u_0(1) = b$$

$$\varepsilon^1 : x u_1' + q(x) u_1 + u_0 u_0' = 0, \qquad u_1(1) = 0$$

Ички катарды тургузуу. Ички катар $x = 0$чекитинин айланасында масштабдоочу өзгөрмөнү $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$ колдонуу менен тургузулат.ξ термининде теңдемени жазып алсак төмөнкүгө ээ болобуз:

$$(\varepsilon\xi + \varepsilon u)\frac{du}{d\xi} + q(\varepsilon\xi)u = r(\varepsilon\xi) \qquad (8)$$

(8) ди εго бөлүп төмөнкүнү алабыз:

$$(\xi + u)\frac{du}{d\xi} + q(\varepsilon\xi)u = \frac{r(\varepsilon\xi)}{\varepsilon} \qquad (9)$$

$q(\varepsilon\xi)$ жана $r(\varepsilon\xi)$ ни Тейлор катарына ажыратабыз:

$$q(\varepsilon\xi) = q(0) + \varepsilon\xi q'(0) + \ldots$$
$$r(\varepsilon\xi) = r(0) + \varepsilon\xi r'(0) + \ldots$$

$u(\xi) = u_0(\xi) + \varepsilon u_1(\xi) + \ldots$ катарын теңдемеге коёбуз.

1) $\varepsilon^0 : (\xi + u_0)\frac{du_0}{d\xi} + q(0)u_0 = \frac{r(0)}{\varepsilon}$

2) $\varepsilon^1 : (\xi + u_0)\frac{du_1}{d\xi} + u_1\frac{du_0}{d\xi} + q(0)u_1 + \xi q'(0)u_0 = r'(0)$

Бул теңдемелерди чектик шарттанды эске алуу менен чечбиз.

Бир калыптагы чечимди алуу үчун сырткы жана ички катарларды бириктирүү керек. Ал үчүн төмөнкү 3 шарт аткарылышы керек:

1) $x \to 0$ го умтулганда сырткы катардын пределин алуу керек.

2) $\xi \to \infty$ ге умтулганда ички катардын пределин алуу керек.

3) $\lim_{x\to 0} u_{\text{сырткы}}(x) = \lim_{\xi\to\infty} u_{\text{ички}}(\xi)$

Бир калыптагы чечимди тургузуу.

$u(x) = u_{\text{сырткы}}(x) + u_{\text{ички}}(\frac{x}{\varepsilon}) -$ (кайчылаш мүчө)

Кайчылаш мүчө сырткы жана ички катарлардагы кайталанууларды жок кылат.

Демек, униформизация ыкмасы [0,1] кесиндисинин бардык аралыгында анын ичинде $x = 0$ чекитинде да бир калыптагы асимптотикалык чечим табууга жардам берет. Бул ыкма чечимдин ар түрдүү областтардагы абалын кылдат талдоону жана катарлардын бириктирилишин талап кылат. Эгерде $q(x)$ жана $r(x)$ аналитикалык функциялар болушса, анда чечимди $x = 0$ чекитинде катар түрүндө көрсөтүүгө болот. [1, с.45–50.]

Жөнөкөй мисал карап көрөлү:

$$\varepsilon u' + u = 1, \qquad u(0) = 0 \tag{10}$$

Стандарттуу асимптоикалык катар.

$$u_{\text{сырткы}}(x) \approx 1$$

Ички катар. $x = 0$чекитине жакын масштабдуу өзгөрмө $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$ ду киргизип, төмөнкүнү алабыз: [2, с. 67–72.]

$$\frac{du}{d\xi} + u = 1$$

$$u(\xi) = 1 + Ce^{-\xi}$$

$u(0) = 0$ чектик шартынан C ны табабыз.

$$C = -1 \Rightarrow u(\xi) = 1 - e^{-\xi}$$

Катарларды бириктирүү. [4, с. 63 б.]

- Сырткы катардын $x \to 0$болгондогу предели: $u_{\text{сырткы}}(x) \to 1$
- Ички катардын $\xi \to \infty$ болгондогу предели: $u_{\text{ички}}(\xi) \to 1$

Пределдер бири-бирине дал келгендиктен, бир калыпта экенин көрсөтөт.

Сырткы жана ички катарларды бириктиребиз:

$$u(x) = u_{\text{сырткы}}(x) + u_{\text{ички}}(\xi) - \text{(кайчылаш мүчө)}$$

Кайчылаш мүчө 1 ге барабар болгондуктан, чечим төмөнкүдөй болот:

$$u(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}};$$

Демек, бир калыптагы чечим бул төмөнкү шарттарды аткарган чечим:

1) Системанын абалын бардык изилденүүчү аймакта так сүрөттөйт.

2) Четки аймактардагы өзгөчөлүктөрдү эске алат.

3) Чектик шарттар менен дал келет.

4) Сырткы жана ички катарларды бириктирет.

Бир калыптагы жарактуулугун (пригодный) текшерүү үчүн төмөнкү аракеттерди аткаруу керек.

- Сырткы жана ички катарларды тургузуу.
- Аларды пределдеринин дал келээрин текшерүү.
- Экөөнү бириктирген бир калыптагы жарактуу чечимди табуу.

u' ти жаңы өзгөрмө ξ менен туюнталы. $x = \varepsilon\xi$ болгондуктан теңдеме төмөнкү түргө келет:

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dx} = \frac{du}{d\xi}\cdot\frac{1}{\varepsilon} \tag{11}$$

(11) ди (10) го коюп төмөнкүнү алабыз:

$$\varepsilon\left(\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{du}{d\xi}\right) + u = 1$$

$$\frac{du}{d\xi} + u = 1 \tag{12}$$

(12) теңдемесин ξ өзгөрмөсү менен жазып алалы:

$$\frac{du}{d\xi} + u = 1, \qquad u(\xi) = u(x)$$

Жыйынтык. Бул илимий иште биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдемелердин чечиминде кичине параметр жана өзгөчө чекиттер бар учурда колдонулган униформизациялоо методу изилденген. Методдун негизги идеясы сырткы жана ички аймактардагы чечимдерди асимптотикалык жакындаштыруулар менен түзүү жана аларды бириктирүүдөн турат. Бул ыкма аркылуу бүтүндөй аныктоо аймагында бирдей жарактуу болгон чечимдерди алууга мүмкүн болгон.

Иштин жыйынтыгында методдун эффективдүүлүгүн далилдеген бир катар мисалдар келтирилген. Айрыкча, чек ара катмарларындагы чечимдердин жүрүм-туруму так анализденген жана алардын бир калыптагы жарактуулугун камсыз кылуу ыкмалары көрсөтүлгөн. Ошондой эле, методдун колдонулуш чектөөлөрү жана артыкчылыктары ачык баяндалган.

Бул изилдөө математикалык анализ жана дифференциалдык теңдемелер теориясына маанилүү салым кошуп, илимий изилдөөлөрдүн өнүгүшүнө түрткү берүү менен бирге, практикалык маселелерди чечүүдө да колдонулушу мүмкүн. Кийинки иштерде методдун татаал системдерге жана башка математикалык моделдерге таратылышы мүмкүнчүлүгү изилденүүсү күтүлөт.

Адабияттар

1. Васильева, А. Б. Сингулярдуу бузулуулар теориясындагы асимптотикалык методдор / А. Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. – Москва: Жогорку мектеп, 2005. – 543 б.

2. Найфе, А. Х. Кичине параметрлер менен дифференциалдык теңдемелердин асимптотикалык анализдери / А. Х. Найфе. – Москва : Мир, 1976. – 455 б.

3. Кеворкян, Ж. Сингулярдук бузулууларга ээ болгон дифференциалдык теңдемелер / Ж. Кеворкян, Ж. Коул. – Нью-Йорк : Springer, 1996. – 532 б.

4. Ломов, С.А. Сингулярдук бузулуулар теориясынын негиздери / С. А. Ломов. – Москва : Физматлит, 2001. – 320 б.

5. О'Мэлли, Р.Э. Кичине параметрлер менен дифференциалдык теңдемелер / Р. Э. О'Мэлли. – Берлин : Springer, 1991. – 297 б.

6. Ван Дайк, М. Асимптотикалык методдор жана алардын колдонулуштары / М. Ван Дайк. – Москва: Мир, 1964. – 410 б.

7. Туркманов, Ж. К. Дифференциалдык теңдемелердин асимптотикалык чечимдери / Ж. К. Туркманов. – Бишкек : Кыргыз улуттук университети, 2018. – 180 б.

8. Туркманов, Ж. К. Алсыз сингулярдуу чекити бар үзгүлтүккө учураган сызыктуу эмес дифференциалдык теңдеменин чыгарылышы. / Ж. К. Туркманов, М. М. Карынбаева // Кыргыз Улуттук Илимдер Академиясынын Математика институтунун Жарчысы, – Бишкек, 2022. – 81 б.

9. Туркманов, Ж. К. Квазисызыктуу параболалык теңдемелер системасынын априордук баалоолору / Ж. К. Туркманов, М. М. Карынбаева // Кыргыз Улуттук Илимдер Академиясынын Математика институтунун Жарчысы, – Бишкек , 2023. – 108 б.

10. Туркманов, Ж.К. Кичине параметрлүү сызыктуу эмес кадимки дифференциалдык теңдемелердин чечимдеринин асимптоттук кеңейүүлөрү / Ж.К. Туркманов, М.М. Карынбаева. – БМУ Жарчысы, – Бишкек, 2024 №3 (69). 229-236. – DOI 10.35254/bsu/2024.69.35. – EDN OVPMOC.